Ein Vortrag über »Einige irrationale Zahlen«

Kapitel 8 aus »Buch der Beweise«

Stacie Bub

17. Oktober 2019

Das achte Kapitel des Buches »Buch der Beweise «handelt, wie der Titel schon verrät, von der Irrationalität einiger Zahlen und wie dies geschickt bewiesen wurde. Im Zuge eines Proseminars, welches das oben genannte Buch zum Thema hat, bietet der folgende Text eine Zusammenfassung des Kurzvortrages.

Im Folgenden werden drei Sätze bewiesen:

Satz 1: *e ist irrational.*
Satz 2: *e^r ist irrational für alle $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.*
Satz 3: *Für jedes ungerade $n \geq 3$ ist $A(n) := \frac{1}{\pi} \arccos(\frac{1}{\sqrt{n}})$ irrational.*

Satz 1. *e ist irrational*

Beweis. Dieser Beweis wurde bereits im Jahr 1840 von Louvilles Aufsatz *»Sur l'iiationalité du nombre e«* aus dem Jahr 1840 zurück .
Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, e wäre rational, also $e = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b > 0$. Durch Multiplikation mit $n!$, $n \in \mathbb{N}$, erhält man

$$e = \frac{a}{b} \iff n!be = an!.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist also eine ganze Zahl. Setzt man nun auf der linken Seite der Gleichung die Reihenentwicklung für e ein, lässt $bn!e$ wie folgt in einen ganzzahligen Teil und einen Rest aufteilen:

$$bn!(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...) = b(n! + \frac{n!}{1!} + ... + \frac{n!}{n!}) + bn!(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + ...)$$

Betrachten wir also den Rest $R := bn!(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + ...)$, um die Annahme zu einem Widerspruch zu führen. Hierzu ziehen wir folgende Ungleichung zur Hife:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + ... < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + ...$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^i} = \frac{1}{n}$$

Multipliziert man diese Ungleichung mit b, so erhält man

$$\frac{b}{n+1} < R < \frac{b}{n},$$

womit man für großes n eine rationale, jedoch keine ganze Zahl R erhält, was die Annahme zu einem Widerspruch führt. □

Um den nächsten zu beweisen, benötigen wir vorab die Aussage eines Lemmas.

Lemma 1. *Für festes $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$f(x) := \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

Es gilt:

i) Die Funktion f(x) ist ein Polynom der Form $f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} c_i x^i$.
ii) Für alle $x \in$ *(0,1) ist* $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.
iii) Für die k-ten Ableitungn der Funktion gilt $f^{(k)}(0), f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Multipliziert man den Zähler der Funktion aus, so folgt i) sofort. Außerdem sind x^n und $(1-x)^n$ für $x \in (0,1)$ ebenfalls zwischen 0 und 1, woraus ii) ebenfalls sofort folgt. Um die dritte Aussage zu beweisen bemerken wir zuerst, dass f(1-x)=f(x), woraus $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x)$ und somit $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x)$ folgt. Es reicht also zu zeigen, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ gilt. Hierfür unterschieden wir zwei Fälle:

1. Fall: k$\in \{n, ..., 2n\}$
   Für k<n verschwindet $f^{(k)}(0)$, da $x = 0$ und alle Summanden des Polynoms ein x als Faktor enthalten. Für k>2n verschwindet die Ableitung, was ebenfalls aus i) folgt.

2.Fall: k$\notin \{n, ..., 2n\}$
   Es gilt $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} c_k \in \mathbb{Z}$, da alle Summanden der Ableitung mit einem Index größer als k durch $x = 0$ als Faktor und alle Summanden mit einem Index kleiner als k durch Ableiten verschwinden.

□

Satz 2. *e^r ist irrational für alle r$\in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$*

Beweis. Hier reicht es zu zeigen, dass $e^s \notin \mathbb{Q}$ für positive $s \in \mathbb{Z}$, denn angenommen $e^{\frac{s}{t}} \in \mathbb{Q}$ mit $s \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dann folgt, dass $(e^{\frac{s}{t}})^t = e^s$ ebenfalls rational ist. Des Weiteren gilt für $e^{-s} = \frac{1}{e^s}$. Wäre $e^s = \frac{a}{b}$ für $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$, so folgt, dass $e^{-s} = \frac{b}{a}$, also ebenfalls rational ist.
Angenommen $e^s = \frac{a}{b}$ für $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$, also $e^s \in \mathbb{Z}$. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so, dass n!$>as^{2n+1}$ gilt und definieren

$$F(x) := s^{2n}f(x) - s^{2n-1}f'(x) + s^{2n-2}f''(x) \mp ... + f^{(2n)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i s^{2n-i} f^i(x)$$

mit $f(x)$ aus dem vorherigen Lemma. Leitet man $F(x)$ ab, so erhält man

$$F'(x) := s^{2n}f'(x) - s^{2n-1}f''(x) + s^{2n-2}f'''(x) \mp ... + sf^{(2n)}(x)$$
$$= -s(-s^{2n}f(x) + s^{2n}f(x) - s^{2n-1}f'^{(x)} + s^{2n-2}f''(x) - s^{2n-3}f'''(x) \pm ... + sf^{(2n)}(x)$$
$$= -se^{sx}F(x) + s^{2n+1}f(x)$$

Mit der Produktregel folgt dann

$$\frac{d}{dx}\left[e^{sx}F(x)\right] = se^{sx}F(x) + e^{sx}F'(x) = s^{2n+1}e^{sx}f(x),$$

also

$$N := b\int_0^1 s^{2n+1}e^{sx}f(x)dx = b\left[e^{sx}F(x)\right]_0^1$$
$$= be^sF(1) - bF(0) = aF(1) - bF(0)$$

nach Annahme. Aus Lemma iii) folgt, dass $N \in \mathbb{Z}$, da $F(1)$ sowie $F(0)$ nur aus ganzzahligen Summanden bestehen..
Mithilfe des Lemmas ii) lässt sich N folgendermaßen nach unten und nach oben abschätzen:

$$0 < N = \int_a^b s^{2n+1}e^{sx}f(x)dx < bs^{2n+1}e^s\frac{1}{n!} = \frac{as^{2n+1}}{n!} < 1.$$

Somit kommt es zu einem Widerspruch.

□

Zuletzt beweisen wir folgende Aussage:

Satz 3. *Für jedes ungerade $n \leq 3$ ist $A(n) := \frac{1}{\pi}\arccos(\frac{1}{\sqrt{n}})$ irrational.*

Beweis. Zunächst benötigen wir das Additionstheorem

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

welches in nach Umformung und mit $\alpha = (k+1)\varphi$ und $\beta = (k-1)\varphi$

$$\cos((k+1)\varphi) = 2\cos\varphi\cos\varphi - \cos(\beta) \tag{1}$$

liefert. Wählt man $\varphi_n = \arccos\frac{1}{\sqrt{n}}$, so erhält man $\cos k\varphi_n = \frac{A_k}{\sqrt{n}^k}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $A_k \in \mathbb{Z}$, n nicht A_k teilt.

Bemerkung 1. $\cos k\varphi_n = \frac{A_k}{\sqrt{n}^k}$ *für* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $A_k \in \mathbb{Z}$*,* n *teilt* A_k *nicht.*

Beweis. Induktionsanfang: Wir wählen $A_0 = A_1 = 1$ und erhalten für k=0,1:

$$k = 0 : \cos 0\varphi_n = 0 = \frac{1}{1} = \frac{A_0}{\sqrt{n}^0}$$

$$k = 1 : \cos 1\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{A_1}{\sqrt{n}^1}$$

Induktionsschritt: $k \to k+1$
Aus (1) folgt

$$\cos(k+1)\varphi_n = 2\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{A_k}{\sqrt{n}^k} - \frac{A_{k-1}}{\sqrt{n}^{k-1}} = \frac{2A_k - nA_{k-1}}{\sqrt{n}^{k+1}}$$

Daraus folgt außerdem $A_{k+1} = 2A_k - nA_{k-1}$. Da $n \mid nA_{k-1}$ betrachten wir $2A_k$. Nun wird A_k nach Voraussetzung nicht von n geteilt und somit auch $2A_k$ nicht, da $n \leq 3$ ungerade ist. □

Nehmen wir nun also an, es gäbe $k, l \in \mathbb{Z}$, $l > 0$, sodass $\frac{1}{\pi}\varphi_n = \frac{k}{l}$, also insbesondere $l\varphi_n = k\pi$ gelte. Setzt man $l\varphi_n$ nun in (1) ein, so erhält man

$$\pm 1 = \cos k\pi = \cos l\varphi_n = \frac{A_l}{\sqrt{n}^l}$$

Somit gilt $\pm A_l = \sqrt{n}^l$.
1. Fall: l ist gerade
Dann ist $l = 2l_1$ für ein $l_1 \in \mathbb{N}$, also ist $\sqrt{n}^l = n^{l_1}$ und insbesondere $n \mid n^{l_1} = \pm A_l$, ein Widerspruch.
2. Fall: l ist ungerade
Dann ist $l = 2l_1 + 1$ für ein $l_1 \in \mathbb{N}$, also ist $\sqrt{n}^l = n^{l_1}\sqrt{n}$. Da $\sqrt{n}$ allerdings eine ganze Zahl ist, muss n eine Quadratzahl sein, womit ebenfalls $n \mid n^{l_1}\sqrt{n} = \pm A_l$ folgt, ein Widerspruch.

□

Literatur:

M. AIGNER, G. M. ZIEGLER: Das BUCH der Beweise, Kapitel 8 'Einige irrationale Zahlen', Springer (2018), 53-59

C.HERMITE: Sur la fonction exponetielle, Comptes rendus de L'Académie des Sciences (Paris) 77 (1873), 18-24; (Euvres de Charles Hermite, Vol. III, Gautier-Villars, Paris 1912, pp. 150-181

J. LIOUVILLE: Sur l'irrationalité du nombre e = 2,718..., Journal de Mathématiques Pures es Appl. (1) 5 (1840), 192; Addition, 193-194